CONCURSUL REGIONAL
"Trepte în matematică și comunicare"
Ediția a XIX-a, 25 mai 2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE_____Clasa a X-a (M2 tehnologic)

Subiectul I (20p)

Fie numărul complex $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Arătați că $z^2-z+1=0$ și deduceți că $z^3=-1$;

b) Arătați că $z\cdot z^2\cdot z^3\cdot\ldots\cdot z^{50}$ este număr întreg;

c) Calculați valoarea sumei $S=z^{2026}+\frac{1}{z^{2026}}$.

Soluție:

a) Verificare prin calcul (sau rezolvă ecuația)

$z^2-z+1=0\Rightarrow z^2=z-1\Rightarrow z^3=z^2-z$ ……..……3p

$\Rightarrow z^3=z-1-z=-1$……..…….3p.

b) $z\cdot z^2\cdot z^3\cdot\ldots\cdot z^{50}=z^{1+2+\ldots+50}$ ……3p.

$z^{51\cdot 25}=\left(z^3\right)^{17\cdot 25}=-1$ care este număr întreg…….……3p.

c) $z^{2026}=z^{3\cdot 675+1}=\left(z^3\right)^{675}\cdot z=-z$ ……4p

$z^{2026}+\frac{1}{z^{2026}}=-\left(z+\frac{1}{z}\right)=-\frac{z^2+1}{z}$ 2p

Se obține $-\frac{z}{z}=-1$ 2p

Subiectul al II-lea (25p)

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\log_3(x^2-8)=\log_3 x+\log_3 2$;

b) $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}+2\cdot\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\frac{11}{3}$;

c) $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}+2\cdot 2^{x+1}=7\cdot 8^{\frac{2x-1}{3}}$;

Soluție:

1. a) $x>2\sqrt{2}$ 2p

Ecuația devine $x^2-2x-8=0$ 2p

Soluția care verifică $x=4$ ……..2p

b) $x>4$.....2p

Cu notația $\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}=y$ ecuația devine $3y^2-11y+6=0$ ……..……3p

$y_1=\frac{2}{3}, y_2=3$ care convin……2p

Revenind la notație se obțin soluțiile : $x_1=-\frac{52}{5}$ care nu convine și $x_2=5$care convine….3p

c) Se obține $7\cdot 2^x=7\cdot 2^{2x-1}$ cu soluția $x=1$ ……4p

2. Să se determine $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ astfel încât $3C_n^2-2C_n^1-C_n^0=9$.

Din calcul combinări $3\frac{n(n-1)}{2}-2n-1=9$ 3p

$\Leftrightarrow 3n^2-7n-20=0$ cu soluția $n=-\frac{5}{3}\notin\mathbb{N}$ si $x=4$ care convine.....2p

NOTĂ: *Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se notează cu punctaj maxim*